Grado en Matemáticas

Examen de Análisis Funcional – Soluciones

1. Sea $T : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$ dado por $(Tx)(t) = t\int_0^1 x(s)\,\mathrm{d}s$ para todo $x \in L_2[0,1]$. Claramente, T es un operador lineal. Prueba que es continuo y calcula su norma.

Solución. El espacio $L_2[0,1]$ es un espacio de Hilbert con la norma

$$\|f\|_2 = \int_0^1 |f(t)|^2\,\mathrm{d}t$$

y el producto escalar

$$\langle f \mid g\rangle = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t$$

Es inmediato que T es un operador lineal. Sea $x \in L_2[0,1]$ y pongamos $\alpha = \int_0^1 x(s)\,\mathrm{d}s$. Tenemos que

$$\|T(x)\|_2^2 = \int_0^1 |(Tx)(t)|^2\,\mathrm{d}t = \int_0^1 |\alpha t|^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}|\alpha|^2$$

Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, tenemos

$$|\alpha| = \left|\int_0^1 x(s)\,\mathrm{d}s\right| = \left|\left\langle x \mid \chi_{[0,1]}\right\rangle\right| \leqslant \|x\|_2$$

y deducimos que $\|Tx\|_2 \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}\|x\|_2$, lo que nos dice que T es continuo y que $\|T\| \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}$. Pero como $\|\chi_{[0,1]}\|_2 = 1$ y $\|T(\chi_{[0,1]})\|_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, concluimos que $\|T\| = \frac{1}{\sqrt{3}}$. ☺

2. Sea $A = \{e_{2n-1} + e_{2n} : n\in\mathbb{N}\} \subset \ell_2$.

1. Describe los espacios $M = A^\perp$ y $M^\perp$.
2. Calcula las proyecciones ortogonales sobre M y $M^\perp$.

Solución. Este ejercicio se hizo en clase. Voy a hacerlo ahora de una forma algo diferente a como lo hicimos en su momento. Sabemos que $M^\perp = (A^\perp)^\perp = \overline{Lin(A)}$, es decir $M^\perp$ es el más pequeño subespacio cerrado que contiene a A. Puesto que los vectores

$\{e_{2n-1}+e_{2n} : n\in\mathbb{N}\}$ generan un subespacio denso en $M^{\perp}$ y son un sistema ortogonal, deducimos que el conjunto $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2}}(e_{2n-1}+e_{2n}) : n\in\mathbb{N}\right\}$ es una base ortonormal de $M^{\perp}$. En consecuencia, la proyección ortogonal sobre $M^{\perp}$ viene dada por

$$P_{M^{\perp}}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\langle x \,|\, \frac{1}{\sqrt{2}}(e_{2n-1}+e_{2n})\right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}(e_{2n-1}+e_{2n})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x(2n-1)+x(2n)}{2}(e_{2n-1}+e_{2n})$$

La proyección ortogonal sobre M vendrá dada por $P_M(x)=x-P_{M^{\perp}}(x)$, es decir:

$$\begin{aligned}
P_M(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}x(n)e_n-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x(2n-1)+x(2n)}{2}(e_{2n-1}+e_{2n})= \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left(x(2n-1)-\frac{x(2n-1)+x(2n)}{2}\right)e_{2n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(x(2n)-\frac{x(2n-1)+x(2n)}{2}\right)e_{2n}= \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x(2n-1)-x(2n)}{2}e_{2n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x(2n)-x(2n-1)}{2}e_{2n}= \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x(2n-1)-x(2n)}{2}(e_{2n-1}-e_{2n})
\end{aligned}$$

Deducimos que $M=\overline{Lin\,\{e_{2n-1}-e_{2n} : n\in\mathbb{N}\}}$. ☺

3. Sea X un espacio normado y $x\in S_X$. Prueba que existe un subespacio cerrado M de X tal que $X=M\oplus\mathbb{K}\,x$ y $\operatorname{dist}(x,M)=1$.

Solución. Sea $f\in X^*$ tal que $\|f\|=f(x)=\|x\|=1$ cuya existencia es consecuencia del teorema de Hahn–Banach. Pongamos $M=Ker(f)$. Tenemos que M es un subespacio cerrado. Todo $z\in X$ puede escribirse en la forma $z=z-f(z)x+f(z)x$ donde, claramente $z-f(z)x\in Ker(f)$ y $f(z)x\in\mathbb{K}\,x$. Luego $X=M+\mathbb{K}\,x$ y dicha suma es claramente una suma directa pues $M\cap(\mathbb{K}\,x)=\{0\}$. Por tanto $X=M\oplus\mathbb{K}\,x$. Además

$$\operatorname{dist}(x,M)=\operatorname{dist}(x,Ker(f))=\frac{|f(x)|}{\|f\|}=1$$

☺

4. Prueba que si X es un espacio normado reflexivo y $x^*\in X^*$, entonces existe $x\in S_X$ tal que $x^*(x)=\|x^*\|$. ¿Es esto cierto si el espacio no es reflexivo?

Solución. Sabemos, por el teorema de Hahn–Banach, que dado un vector, x^*, en un espacio normado, X^*, existe una forma lineal, f, en el dual de dicho espacio normado, $f\in X^{**}$, tal que $\|f\|=1$ y $f(x^*)=\|x^*\|$. Como X es reflexivo, debe existir $x\in X$ tal que $f=J(x)$, con lo cual tenemos que $f(x^*)=J(x)(x^*)=x^*(x)=\|x^*\|$, y $\|x\|=\|J(x)\|=\|f\|=1$. ☺

5. Sea $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ una sucesión tal que para todo $x \in \ell_1$ se verifica que la sucesión $\{x(n)u(n)\}$ está acotada. Prueba que u está acotada.

Solución. Definamos para cada $n \in \mathbb{N}$ el funcional $f_n : \ell_1 \to \mathbb{K}$ por $f_n(x) = x(n)u(n)$ para todo $x \in \ell_1$. Claramente, f_n es un funcional lineal y

$$|f_n(x)| = |u(n)|\,|x(n)| \leqslant |u(n)|\,\|x\|_1$$

lo que implica que f_n es continuo y $\|f_n\| \leqslant |u(n)|$. Como $|f(e_n)| = |u(n)|$, obtenemos que $\|f_n\| = |u(n)|$. La hipótesis nos dice que para cada $x \in \ell_1$ el conjunto $\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ está acotado, es decir, la familia de funcionales lineales $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ está puntualmente acotada. Como ℓ_1 es un espacio de Banach, el teorema de Banach-Steinhaus nos dice que dicha familia está acotada en norma, es decir, existe $M > 0$ tal que $\|f_n\| = |u(n)| \leqslant M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Lo que prueba que la sucesión u está acotada. Este ejercicio se hizo en clase. ☺

6. Prueba que todo conjunto w-compacto en un espacio normado está acotado.

Solución. Sea K un conjunto w-compacto en un espacio normado X. Como los funcionales $f \in X^*$ son w-continuos, se verificará que $f(K)$ será un conjunto acotado para todo $f \in X^*$, es decir, K está “débilmente acotado”. Esto es tanto como decir que la familia de funcionales $\{J(x) : x \in K\} \subset X^{**}$ está puntualmente acotada, por lo que, envirtud del teorema de Banach–Steinhaus, concluimos que dicha familia está acotada en norma lo que, por ser la inmersión J isométrica, implica que K está acotado. ☺